MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DEUXIEME COMPOSITION

Durée : 3 heures

La partie I est indépendante des deux autres.

PARTIE I

A. On se propose d'étudier quelques propriétés de la matrice A définie par :

$$A = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible.

2. Montrer que A est diagonalisable ; déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

3. Utiliser la question précédente pour calculer A^k , où k désigne un entier naturel.

B. On dispose de 3 boîtes vides et de boules en grande quantité; on distribue les boules une par une, au hasard, dans les 3 boîtes ; pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3 et r entier naturel non nul, on note $p_r(i)$ la probabilité pour que i boîtes exactement soient non vides lorsqu'on a distribué r boules.

1. Calculer $p_1(i)$.

2. Justifier l'égalité :

$$\begin{pmatrix} p_r(1) \\ p_r(2) \\ p_r(3) \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} p_{r-1}(1) \\ p_{r-1}(2) \\ p_{r-1}(3) \end{pmatrix}$$

où r est supérieur ou égal à 2 et A est la matrice définie dans la Partie I A).

3. En déduire pour toutes les valeurs de i et de r la quantité $p_r(i)$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul.

On se propose de généraliser le problème précédent au cas de n boîtes numérotées de 1 à n: on dispose ainsi de boules discernables en grande quantité et on les répartit, au hasard, une à une, dans les boîtes supposées vides au départ. Pour r entier naturel non nul et j entier ($0 \leq j \leq n-1$), on notera $p_j(r,n)$ la probabilité pour qu'il reste exactement j boîtes vides lorsque r boules ont été réparties. Le but de cette partie est la détermination de $p_j(r,n)$.

1. Justifier que le nombre de répartitions possibles de r boules dans n boîtes est n^r.

2. On note A(r,n) le nombre de répartitions de r boules dans les n boîtes, telles qu'aucune boîte ne soit vide.

a. Déterminer A(r,1) et A(r,2);

b. Justifier la relation :

$$A(r,n+1) = \sum_{k=1}^{k=r-1} C_r^k \times A(r-k,n) \qquad (1)$$

On pourra pour cela considérer le nombre de boules contenues dans la boîte numérotée n+1.

c. Justifier la relation :

$$A(r,n) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i C_n^i \times (n-i)^r \qquad (2)$$

On pourra par exemple procéder par récurrence sur n en utilisant la formule (1).

d. En déduire $p_0(r,n)$ (r et n entiers naturels non nuls).

On pose, pour tout entier i,

$$u_i(r,n) = C_n^i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^r \quad \text{si} \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

et $\quad u_i(r,n) = 0 \quad$ si $i \geq n$.

Exprimer $p_0(r,n)$ à l'aide des $u_i(r,n)$.

3. Exprimer en fonction de A(r,n-j) le nombre de répartitions de r boules dans les n boîtes qui laissent exactement j boîtes vides.

4. En déduire :

$$p_j(r,n) = C_n^j \times \left(\frac{n-j}{n}\right)^r \times p_0(r,n-j) \qquad (3)$$

$$= u_j(r,n) \times p_0(r,n-j).$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

On se propose d'étudier le comportement de $p_j(r,n)$ lorsque r et n tendent vers l'infini en vérifiant la condition suivante:

il existe un réel λ strictement positif tel que $ne^{-r/n} \longrightarrow \lambda$.

Cette condition sera supposée remplie dans toute la suite.

1. Préliminaire: reste de la série exponentielle.
Soit a un réel strictement positif, N un entier strictement supérieur à a.

On pose : $R_N(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{N+k}}{(N+k)!}$.

Montrer que, pour tout entier k, $k \geq 1$, $\frac{a^{N+k}}{(N+k)!} \leq \frac{a^N}{N!}\left(\frac{a}{N}\right)^k$.

En déduire que $0 < R_N(a) \leq \frac{a^N}{N!}\cdot\frac{a}{N-a}$.

a. Montrer qu'il existe un réel a, $a>\lambda$ tel que, pour tout entier naturel non nul n, $n\,e^{-r/n} < a$.

b. En déduire que pour tout entier naturel i, on a:

$$0 \leq u_i(r,n) \leq \frac{a^i}{i!}.$$

(pour $1 \leq i \leq n-1$, on pourra écrire :

$$u_i(r,n) = \frac{n^i}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i}{n}\right)^r.$$

et utiliser l'inégalité $\ln(1+t) \leq t$, valable pour $t>-1$.)

2. On fixe un entier N , $N>a$ et on suppose $n> N$.
a. Montrer les inégalités :

$$\left|\sum_{i=N+1}^{+\infty} (-1)^i\, u_i(r,n)\right| \leq \frac{a^N}{N!}\,\frac{a}{N-a},$$

$$\left|\sum_{i=N+1}^{+\infty} (-1)^i \frac{\lambda^i}{i!}\right| \leq \frac{a^N}{N!}\,\frac{a}{N-a}.$$

En déduire qu'on a :

$$\left|e^{-\lambda} - p_0(r,n)\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{N} (-1)^i \left(\frac{\lambda^i}{i!} - u_i(r,n)\right)\right| + 2\frac{a^N}{N!}\,\frac{a}{N-a}.$$

b. Montrer que, pour i fixé, $0 \leq i \leq N$, $u_i(r,n) \longrightarrow \frac{\lambda^i}{i!}$ lorsque r et n tendent vers $+\infty$.

c. Montrer qu'on peut choisir N assez grand pour que $2\frac{a^N}{N!}\,\frac{a}{N-a}$ soit arbitrairement petit. En déduire la limite de $p_0(r,n)$ lorsque r et n tendent vers $+\infty$.

d. Quelle est la limite de $p_j(r,n)$ lorsque r et n tendent vers $+\infty$?